Revista de Filosofía
Volumen 81 (2024) 49-71
Artículo:
Doi: 10.5354/0718-4360.2024.71457

TEOREMAS RECÍPROCOS EN EUCLIDES (DESDE EL PUNTO DE VISTA MEDIÁTICO)[1]

RECIPROCAL THEOREMS IN EUCLID (FROM THE MEDIATIC POINT OF VIEW)

José Seoane[2]
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad de la República
Sistema Nacional de Investigadores
Orcid: 0000-0002-9571-3139

Recibido: 23-07-2024 • Aceptado: 10-09-2024

Resumen

La demostración euclídea es inferencialmente heterogénea: su comunicación combina texto y diagrama, y tal rasgo es deductivamente relevante. Si nos interesa estudiarla desde el punto de vista comunicacional o mediático, es necesario descifrar la cooperación entre aquellos medios y la dinámica expresión-estructura. Esta sensibilidad intelectual inaugura una agenda rica. Tal agenda incluye, entre otros, el interrogante por el comportamiento expresivo/estructural de la demostración

1 Deseo dejar constancia de mi agradecimiento por la lectura de este trabajo a las o los árbitros anónimos; sus dictámenes me permitieron eliminar errores y mejorar la exposición de mis argumentos. Las deficiencias subsistentes son de mi exclusiva responsabilidad.

2 Magíster en Lógica y Filosofía de la Ciencia (Universidad de Campinas, Brasil) y doctor en Filosofía (Universidad Nacional de Córdoba, Argentina). Es autor del libro *Lógica y argumentación*, así como de diversos artículos en las áreas de filosofía, lógica e historia de la lógica. Es Profesor de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (Universidad de la República, Uruguay), y miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Sus áreas de investigación son, actualmente, la reflexión filosófica sobre la demostración heterogénea, los procesos elucidatorios en matemáticas, y el programa lógico de Vaz Ferreira.

euclídea en diversos contextos especiales. Por ejemplo, ¿cómo se manifiesta dicha heterogeneidad en el caso de las pruebas de teoremas recíprocos? Un examen –aún parcial y preliminar– permite identificar ciertos relevantes rasgos en el plano comunicativo.

Palabras clave: Euclides, demostración geométrica, heterogeneidad expresiva, heterogeneidad inferencial, diagramas.

Abstract

The Euclidean demonstration is paradigmatically heterogeneous: its communication combines text and diagram. If we are interested in studying it from the *communicational* or *mediatic* point of view, it is necessary to decipher the cooperation between such media and the dynamic expression-structure. This intellectual sensitivity inaugurates a rich agenda. Such an agenda includes, among others, the question of the expressive/structural behavior of the Euclidean demonstration in various special contexts. For example, how does such heterogeneity manifest itself in the case of proofs of reciprocal theorems? An examination (still partial and preliminary) allows the identification of certain relevant mediatic features.

Keywords: Euclid, geometric proof, expressive heterogeneity, inferential heterogeneity. Diagrams.

La demostración euclídea es filosóficamente interesante por múltiples razones; una de ellas radica en la singularidad de su comunicación[3]. Esta combina texto y diagrama (heterogeneidad expresiva) y, además, tal rasgo mediático resulta lógicamente relevante (heterogeneidad inferencial)[4]. Una forma de avanzar en este terreno es distinguir entre la *expresión* y la *estructura* de la demostración. Dicho en una forma esquemática, la última capta la ilación inferencial, es decir, la articulación lógica (en sentido lato), la primera consiste en la dimensión propia o exclusivamente comunicacional. Así, por ejemplo, una traducción española y una inglesa de la proposición I.1 diferirán expresivamente, pero no estructuralmente.

3 La relevancia de este último aspecto ha sido defendida por diversos autores; en esta clave, por ejemplo, puede entenderse la vindicación del *estilo* euclidiano por parte de Netz frente a una concepción contrastante debida a Knorr (véase Netz 1999a y b).

4 La distinción entre heterogeneidad *expresiva* e *inferencial* o *lógica* es introducida en Seoane (2016); una formulación más reciente puede leerse en Seoane (2021a).

En este caso la diferencia expresiva resulta filosóficamente irrelevante, pero este no es siempre el caso[5].

Si nos interesa estudiar la demostración euclidiana desde un punto de vista mediático, *qua* caso ejemplar de heterogeneidad inferencial, es necesario, por supuesto, descifrar la cooperación entre los medios gráfico y lingüístico, y, a la vez, registrar debidamente la interacción expresión-estructura, volviendo así más denso el plano comunicacional. En consecuencia, no basta el examen de la cooperación diagrama-texto en términos exclusivamente expresivos; tal análisis debe comprometer también su interacción fina con la dimensión lógica[6]. Esta sensibilidad intelectual doble inaugura una agenda rica; que incluye (entre muchas otros) el interrogante por el comportamiento de diversas estrategias o patrones argumentales euclídeos. Por ejemplo, ¿cómo se manifiesta aquella densa heterogeneidad en el caso de las pruebas de teoremas recíprocos? En particular, ¿cómo contribuye el diagrama en tal contexto? Un examen –aún parcial y exploratorio– como el que se desarrolla en las páginas que siguen (concentrado exclusivamente en ejemplos extraídos de los Libros I y III) permite identificar algunas características o rasgos comunes y significativos.

El itinerario es el siguiente. En el apartado 1 estudiaremos dos teoremas recíprocos (I.18-I.19) e identificaremos ciertos rasgos expresivos y estructurales en sus demostraciones; en el 2, se analiza las demostraciones de otros dos teoremas recíprocos (I.24-I.25), y evidencia una similitud notable entre estas y las estudiadas en el apartado previo. El apartado 3 atiende a una formulación diversa de la relación entre proposiciones recíprocas: no vía dos teoremas, sino a través de solo uno. Aunque la diferencia en la formulación lingüística es irrelevante, dado que nos interesan las respectivas demostraciones heterogéneas, la comparación resulta digna de análisis, especialmente atendiendo a su dimensión diagramática. Finalmente, el último apartado reúne las conclusiones alcanzadas.

5 Este contraste general (con matices propios) puede encontrarse, por ejemplo, en Weaver (1988), Chateaubriand (2005), Giaquinto (2008). En particular, la relevancia de la expresión (en términos estructurales) en el caso euclídeo puede verse, por ejemplo, en Soane (2022).

6 Luego, cuando hablo de comunicacional o mediático sin más me refiero a la trama expresivo-estructural, no en exclusividad a la dimensión expresiva.

1.

Convendrá empezar fijando algunas ideas, esenciales para los desarrollos que siguen. Dos teoremas recíprocos podríamos pensar que comunican (vía lingüística) la vigencia de una bidireccionalidad inferencial. Un ejemplo:

> En todo triángulo, el lado mayor subtiende al ángulo mayor.
> En todo triángulo, al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.

En todo triángulo, dada la información de que determinado lado es el mayor, entonces el ángulo que subtiende es el mayor.

En todo triángulo, dada la información de que determinado ángulo es el mayor, entonces el lado que lo subtiende es el mayor.

La bidireccional inferencial referida podría exponerse quizá así:

> Si LM(l,t) & SUB(l,a) entonces AM(a,t)
> Si AM(a,t) & SUB(l,a) entonces LM(l,t)

-donde "l" es una variable que adopta como valores lados, "t" una variable cuyos valores son triángulos, "a" una variable cuyos valores son ángulos, "LM" es una relación que dice: "… es el lado mayor del triángulo…", "AM" dice: "…es el ángulo mayor del triángulo…", y "SUB" es una relación que podríamos parafrasear así: "…es el lado que subtiende al ángulo…".

En esencia, ambos condicionales autorizan los pasajes inferenciales en las dos direcciones antes aludidas; expresado en forma sucinta: desde el lado mayor al ángulo mayor (subtendido por el lado) y la inversa. El ejemplo corresponde a los teoremas recíprocos I.18 y I.19; el medio *lingüístico* permite comunicar exitosamente ambos tránsitos. Pero, ¿qué ocurre a nivel diagramático?

En principio, parece razonable conjeturar que dicho nivel debería captar las tres relaciones binarias protagónicas: LM, SUB, AM. Como se sabe, según el punto de vista de Manders, la fidelidad inferencialmente relevante se restringe (en términos de lectura diagramática) a las atribuciones coexactas[7]. Luego, podríamos sospechar que puede 'cocientarse' la clase de diagramas euclídeos por la siguiente relación de equivalencia: "admitir la misma lectura coexacta". En tal caso, aunque eventualmente

[7] La distinción entre atribuciones coexactas y exactas se encuentra en Manders (2008b).

diferentes en términos exactos, podríamos tomar (a los fines inferenciales) como *iguales* a dos diagramas pertenecientes a la misma clase de equivalencia[8]. Usaré pues el predicado "iguales" (referido a diagramas) en tal acepción, y distinguiré (en la misma clave) "zonas" o "porciones" o "partes" de un diagrama dado –a las que llamaré 'conformaciones diagramáticas'–. Estudiemos ahora este último punto.

Cuando examinamos un diagrama euclidiano (en este contexto) resulta útil discriminar dos conformaciones diagramáticas o visuales; las denominaré '*núcleo*' (N) y '*diagramación auxiliar*' (D). El núcleo podría decirse que traduce gráficamente (en forma total o parcial) la exposición (la échthesis)[9]; este puede, en algunos casos, pensarse como zona o porción de una representación diagramática dada. La diagramación auxiliar (que puede encontrarse presente o no en el diagrama bajo estudio) extrae su motivación exclusivamente de las necesidades de la orquestación heterogénea de la prueba (*apódeixis*); en términos intuitivos, podemos decir que es adicional a N, constituyéndose así en un protagónico complemento gráfico del texto propiamente demostrativo. Su descripción se encuentra, esencialmente, en la *construcción* (*kataskeué*)[10].

Usaremos ahora esta distinción entre configuraciones o partes del diagrama para analizar nuestro primer ejemplo de proposiciones recíprocas: I.18-I.19.[11] Empecemos por I.18, cuyo *enunciado* (*prótaxis*), como se adelantó, es el siguiente:

> En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor.

8 Esto no supone, sin embargo, en la práctica inferencial, una insensibilidad absoluta a una fidelidad más ambiciosa por parte del diagrama que incluya en cierta forma aspectos exactos, especialmente, en la producción diagramática, ya que importa atender a determinados niveles de interacción entre ambos aspectos (coexactos/exactos) en la disciplina diagramática, esencial al control del raciocinio geométrico tradicional (puede consultarse al respecto Manders, 2008b, en particular, p. 94 y ss.).

9 Seguiremos la tradicional división de Proclo de la demostración euclidiana; la referencia clásica al respecto es Proclo (1970), p. 203 y ss.

10 Las referencias a las etapas identificadas por Proclo deben tomarse como ilustrativas u orientadoras, no en una forma rigurosa. Las omisiones, variaciones y entremezclarse de dichas etapas en la demostración euclidiana han sido estudiadas finamente por Netz (1999b).

11 Sigo aquí la traducción de M.L. Puertas Castaños en Euclides (1991). Así mismo he consultado, según el caso, Heath (1908a y b).

El diagrama:

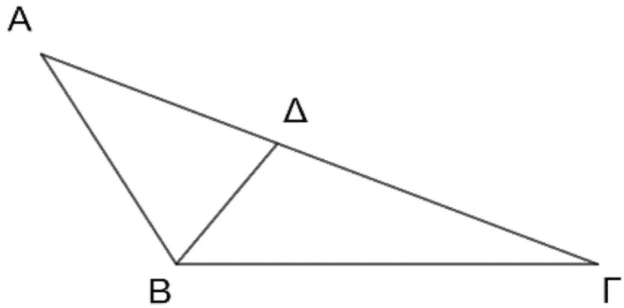

Diagrama 1 (I.18)

Si examinamos la demostración de este teorema: ¿cuál es N? Esta es la *exposición* de I.18:

> Sea ΑΒΓ el triángulo que tiene el lado ΑΓ mayor que ΑΒ.

El *núcleo* podríamos decir que lo constituye el triángulo ΑΒΓ:

La diagramación auxiliar está compuesta por los segmentos ΑΔ y ΔΒ. He aquí como esta es justificada en la construcción:

> Pues como ΑΓ es mayor que ΑΒ, hágase ΑΔ igual a ΑΒ [I.3], y trácese ΒΔ.

Pasemos ahora a I.19. Este es (tal cual se adelantó) su *enunciado*:

> En todo triángulo el ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.

Visitemos ahora el diagrama correspondiente:

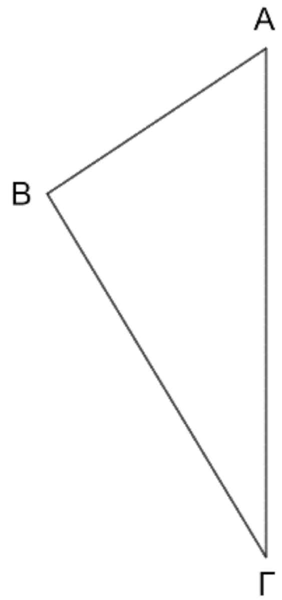

Diagrama 2 (I.19)

¿Cuál es N? La *exposición* de I.19:

> Sea ΑΒΓ el triángulo que tiene el ángulo ΑΒΓ mayor que el ángulo ΒΓΑ.

El núcleo es igual (en nuestra acepción) al de I.18. No existe aquí diagramación auxiliar, ni construcción.

Identificadas, en este contexto particular, las configuraciones diagramáticas antes caracterizadas en forma general, usémoslas a los efectos de caracterizar mejor el comportamiento de los diagramas recíprocos –es decir, aquellos que corresponden, respectivamente, a cada uno de los teoremas que articulamos vía tal relación.

Una primera conjetura resulta plausible: N es común. Esto es: el núcleo es el mismo. En este caso, las respectivas exposiciones respaldan esta coincidencia. Difieren en la existencia de diagramación auxiliar: esta se encuentra presente en el Diagrama 1, no así en el Diagrama 2. Este rasgo o característica podría expresarse sintéticamente así: N es común, conformaciones de tipo D pueden eventualmente presentarse.

Un rasgo directamente asociado a N: el mantenimiento de las letras que acompañan el diagrama. Esta característica reafirma comunicacionalmente la igualdad referida, y colabora además en la articulación de ambos resultados (I.18 y I.19), lo que no equivale, como es obvio, a que las condiciones atribuidas en el texto al diagrama sean las mismas. Por el contrario, estas deben funcionar en una forma intuitivamente especular: mientras el texto de I.18 atribuye determinado rasgo exacto al lado, I.19 hace lo propio respecto del ángulo respectivo. Es decir: en el primero, el texto se encarga de establecer que ΑΓ es “mayor” que ΑΒ y en el segundo que el ángulo ΑΒΓ es “mayor” que el ángulo ΒΓΑ. Como señala Manders:

> Cuando la disciplina diagramática está en vigor con respecto a una afirmación exacta (veremos que en los argumentos por reducción al absurdo esto no siempre ocurre), decimos que “el diagrama está *sometido a*” la atribución exacta; digamos, que una línea *AB* es recta. El término “sometido a” demarca que, aunque el diagrama en estas circunstancias no necesita satisfacer (y en general no lo hará) la condición de una manera legible sin equívocos, se ha de apegar a ciertas normas en relación con su función en el argumento, normas que podrían exigir el reemplazo del diagrama en cualquier momento. (Manders 2008, 99, Manders en prensa, 348)

Luego podría decirse que en I.18 y en I.19 N (en cada uno de los diagramas en cuestión) se encuentra *sometido a* atribuciones exactas diferentes; esta situación refleja la articulación propia de los teoremas recíprocos. Pero quizá nos enseñe algo más: cierta función expresiva de los diagramas que no se agota en los contextos acotados de las proposiciones correspondientes, ya que en este caso parece desbordar cada uno de estos y, al evidenciar un parentesco evidente entre ambas configuraciones diagramáticas, construir una suerte de puente entre los resultados recíprocos.

Parece razonable asimismo conjeturar que, dada la riqueza de la diagramación auxiliar y la construcción, la prueba de I.18 exhiba explícitamente una más profunda interacción diagrama-texto que la de I.19. Es decir: la prueba de I.18 debería ser, en forma explícita, más densa en términos del despliegue de la heterogeneidad inferencial que la de I.19. Revisemos ahora dichos tramos argumentales.

Primero, I.18. He aquí la prueba:

> Y puesto que ΑΔΒ es un ángulo externo al triángulo ΒΓΔ, es mayor que el interno y opuesto ΔΓΒ [I.16]; pero el ángulo ΑΔΒ es igual al [ángulo] ΑΒΔ, puesto que el lado ΑΒ es también igual a ΑΔ; por tanto, el [ángulo] ΑΒΔ también es mayor que el [ángulo] ΑΓΒ; luego el [ángulo] ΑΒΓ es mucho mayor que ΑΓΒ.

Desde el punto de vista que nos interesa, podríamos describir el desarrollo de la prueba así: la aplicación de I.16, permite obtener que el ángulo AΔB es mayor que ΔΓB (identificada la relación entre ellos vía el diagrama), y la aplicación de I.5, permite inferir que el ángulo AΔB es igual al ángulo ABΔ (ya que, por construcción, el lado AB es igual al lado AΔ,). Luego, ABΔ también es mayor que el ángulo AΓB (pues el diagrama nos enseña que este es ΔΓB). Ahora ocurre el tramo inferencial que más nos interesa: el diagrama nos informa que ABΔ es parte de ABΓ y entonces, por NC5, el ángulo ABΔ es menor que el ángulo ABΓ, o sea: ABΓ es mayor que ABΔ. Esta conclusión se apoya, por una parte, en una información provista por el diagrama (la referida a la relación "ser parte de"), y, por otra, en NC5 (que permite pasar de la relación "ser parte de" a la relación "ser menor que")[12]. Así la lectora, el lector advierte fácilmente la fortaleza heterogénea de este tramo argumentativo. Como ya sabíamos que ABΔ es mayor que el ángulo AΓB, resulta transparente la conclusión euclidiana: "ABΓ es mucho mayor que AΓB"[13].

Ahora, I.19. Este teorema afirma: En todo triángulo, al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.

Como se recuerda, la *prueba* se estructura con base en una suerte de esquema de demostración por absurdo:

> Porque si no, o bien AΓ es igual a AB, o es menor; ahora bien, AΓ no es igual a AB; pues entonces sería también igual el ángulo ABΓ al [ángulo] AΓB [I.5], pero no lo es; por tanto, AΓ no es igual a AB. Ni tampoco AΓ es menor que AB; pues entonces sería menor el ángulo ABΓ que el ángulo AΓB (I.18); pero no lo es, por lo tanto, AΓ no es menor que AB. Pero se ha demostrado que tampoco es igual. Por tanto, AΓ es mayor que AB.

Revisemos el hilo inferencial, de acuerdo con nuestros intereses presentes. La negación de lo que se pretende demostrar implica una disyunción: o bien AΓ es igual a AB, o bien AΓ es menor a AB. Esta disyunción es falsa. ¿Por qué? Porque ambos disjuntos lo son. Supongamos que AΓ es igual a AB. Por I.5, los ángulos ABΓ y AΓB serían iguales. Pero, por hipótesis, esto es falso. Luego AΓ no es igual a AB. Supongamos que AΓ es menor que AB. Pero entonces, por I.18, ABΓ sería menor que AΓB. Pero, por hipótesis, esto es falso. Como la disyunción es falsa, la

12 Este uso combinado de información diagramática y NC5 es bosquejado en Lassalle Casanave y Seoane (2016); una elaboración sólida y generalizada se encuentra en De Risi (2021).

13 Esta parece ser una forma estable de cualificación de ciertas desigualdades en Euclides. Ella parece responder a la situación siguiente: en general, si pruebo que B es mayor que C y que A es mayor que B, afirmo que A es "mucho mayor" que C.

suposición asumida (a saber, la falsedad del resultado pretendido) es falsa, o sea: el resultado es verdadero. Podemos decir que, explícitamente, el raciocinio se ha desarrollado en términos proposicionales. No hay nada semejante al protagonismo diagramático que permitió obtener la información clave de parte-todo estudiado en el caso anterior. Es en este sentido que el contraste diagramático entre estructuras-N+D y estructuras-N parece reflejarse en forma elocuente en el estilo de la *prueba*: esta posee una naturaleza más profundamente heterogénea (en su formulación explícita) en el primer que en el segundo caso. Esta mayor densidad comparativa (al inspeccionar uno y otro diagrama) de los del primer tipo respecto de los del segundo quizá encierra la sugerencia de la primacía en el ordenamiento de las proposiciones respectivas. Pero parece existir más información a registrar para comprender mejor la ordenación de los teoremas.

Describamos, en forma esquemática, las categorías de objetos geométricos que articulan, respectivamente, las dos *pruebas*: I.18 va desde lado a ángulo, I.19 desde ángulo a lado. Esta relación especular obviamente no es exclusiva de estos resultados particulares; es propia de su naturaleza de recíprocos. Exploremos qué resultados previos usados (en la justificación de I.18) vinculan una y otra categoría en, hablando metafóricamente, igual dirección; podríamos decir que de lados a ángulos nos habilitan al tránsito inferencial I.16 y I.5. Asimismo, el propio teorema es un nuevo resultado puente. En I.19, como punto de partida, se asume una propiedad del ángulo (es el mayor). Esto resulta perfectamente consiste con la dirección inferencial: de ángulo a lado. Pero este es el punto a resaltar: al activar la hipótesis de la negación del resultado pretendido, se redefine o se invierte la vinculación categorial relevante. Es decir: la opción metodológica comentada activa la articulación categorial ya estudiada, a saber: lado-ángulo. ¿Por qué? Porque lo que debemos demostrar ahora es que la disyunción “o bien ΑΓ es igual a ΑΒ o bien ΑΓ es menor a ΑΒ” es falsa. Pero esto supondrá transitar la dirección lado-ángulo. Y, consecuentemente, aprovechar la acumulación ofrecida por la prueba anterior. Dicho de otro modo: la apelación a la estrategia por absurdo posibilita el uso del resultado anterior, pues activa la dirección inversa a la establecida en el enunciado del teorema. Y esta alternativa refleja la articulación entre los resultados recíprocos.

Dos aspectos relevantes parecen vislumbrarse en estas últimas consideraciones. Por una parte, la mayor densidad del primer teorema parece respaldar su precedencia en el orden expositivo euclidiano. Por otra, la “direccionalidad” estructural del primer resultado (dada la relación de recíprocos entre ambos teoremas) hace que la explotación inferencial en la demostración del segundo favorezca una opción metodológica: la reducción al absurdo.

Visitemos ahora otros casos de teoremas recíprocos explícitos; aunque no se pretende contemplar la totalidad de variantes en que se presenta esta importante relación en Euclides, se entiende de utilidad inspeccionar (en un examen preliminar y exploratorio) algunas alternativas significativas.

2.

Dos teoremas recíprocos:

> I.24 Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero uno tiene el ángulo comprendido por las rectas iguales mayor que el otro, también tendrá la base mayor que la otra.
>
> I.25 Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro.

El diagrama protagónico en I.24 es el siguiente:

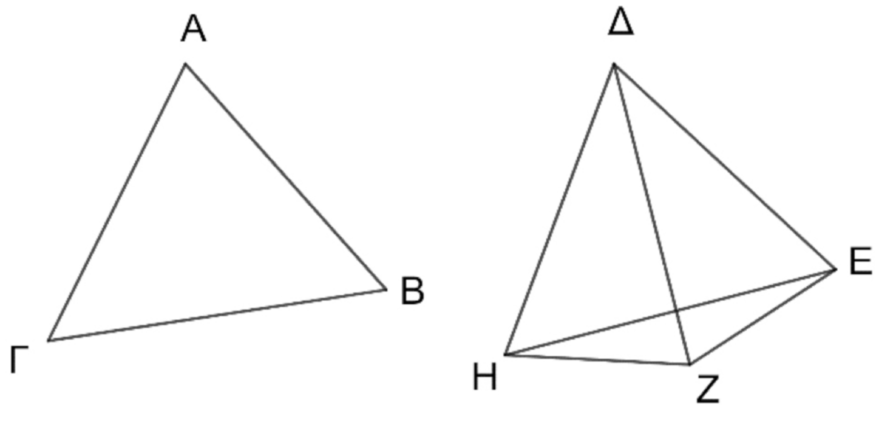

Diagrama 3 (I.24)

¿Cuál es N? La exposición:

> Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen los dos lados AB, AΓ, iguales a los dos lados ΔE, ΔZ, respectivamente: AB a ΔE y AΓ a ΔZ, pero el ángulo correspondiente a A sea mayor que el ángulo correspondiente a Δ.

El núcleo diagramático se compone de los dos triángulos ABΓ y ΔEZ.

La construcción corre así:

> Pues como el ángulo BAΓ es mayor que el ángulo EΔZ, constrúyase la recta ΔE y en su punto Δ el (ángulo) EΔΓ igual al ángulo BAΓ [I.23], y hágase ΔH igual a una de las dos rectas AΓ, ΔZ, y trácese EH, ZH.

La diagramación auxiliar está compuesta por los segmentos ΔH (que debe cumplir los dos requisitos especificados: hacer EΔΓ igual a BAΓ y ΔH igual a una de las dos AΓ o ΔZ), EH y EZ.

Recuérdese que lo que debe demostrarse es que la base BΓ es mayor que la base EZ. Ahora concentrémonos en la *prueba*:

> Pues bien, como AB es igual a ΔE, y AΓ a ΔH, las dos (rectas) BA, AΓ son iguales respectivamente a las dos (rectas) EΔ, ΔH; y el ángulo BAΓ es igual al ángulo EΔH; por tanto, la base BΓ es igual a la base EH [I.4]. Asimismo, como ΔZ es igual a ΔH, el ángulo ΔHZ es también igual al ángulo ΔZH [I.5]; por tanto, el (ángulo) ΔZH es mayor que el (ángulo) EHZ; entonces, el (ángulo) EZH es mucho mayor que el ángulo EHZ. Y dado que EZH es un triángulo que tiene el ángulo EZH mayor que el (ángulo) EHZ y el ángulo mayor lo subtiende el lado mayor [I.19], entonces el lado EH es también mayor que el lado EZ. Pero EH es igual a BΓ; por tanto, BΓ es mayor que EZ.

Examinemos el hilo inferencial desde el punto de vista de la cooperación visual-lingüística. La igualdad de las bases BΓ y EH resulta de aplicar I.4. La igualdad de los ángulos ΔHZ y ΔZH, de aplicar I.5, pues ΔZ y ΔH son iguales por construcción. De un modo análogo a I.18, a partir del diagrama, obtenemos la información que EHZ es parte de ΔHZ, y, por NC5, EHZ es menor que de ΔHZ, y como este último es igual que ΔZH, ΔZH es mayor que EHZ. Nuevamente el diagrama: ΔZH es parte de EZH, y, por NC5, ΔZH es menor que EZH. O sea: EZH es mayor que ΔZH. Resulta ahora transparente que EZH es "mucho mayor" que EHZ. Como, en el triángulo EZH, el ángulo EZH es mayor que EHZ y "el ángulo mayor lo subtiende el lado mayor" (I.19), EH es mayor que EZ. Como EH es igual a BΓ, concluimos que la base BΓ es mayor que la base EZ. La intensidad de la cooperación heterogénea se destaca en forma elocuente en, por así decirlo, la doble intervención diagrama-NC5.

Visitemos ahora I.25. El diagrama:

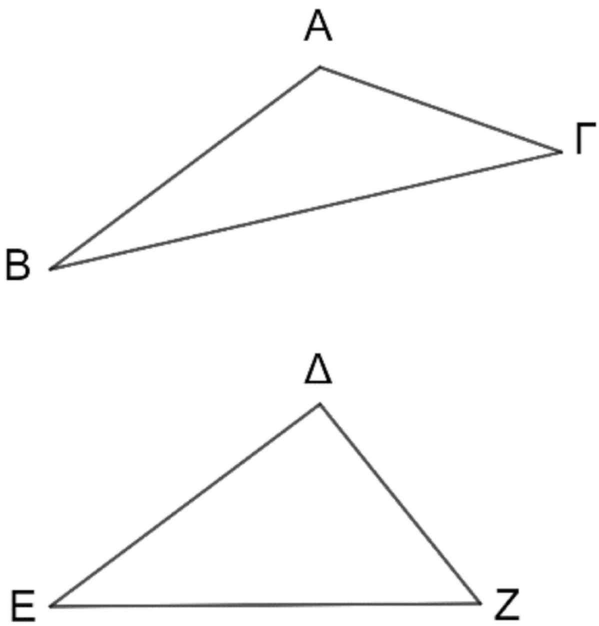

Diagrama 4 (I.25)

¿Cuál es N? La exposición:

> Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ dos triángulos que tienen los dos lados ΑΒ, ΑΓ, iguales a los dos lados ΔΕ, ΔΖ, respectivamente: ΑΒ a ΔΕ y ΑΓ a ΔΖ, pero sea la base ΒΓ mayor que la base ΕΖ.

A partir de la lectura de la exposición resulta evidente que se trata del mismo N -recordar: en la acepción definida antes. Es decir, el núcleo está compuesto por los dos triángulos ΑΒΓ y ΔΕΖ; adviértase asimismo la coincidencia en las letras. Como es evidente, no existe aquí diagramación auxiliar (como en I.19).

Aquello que debe demostrarse es que el ángulo ΒΑΓ es mayor que el ángulo ΕΔΖ. Ahora examinemos la *prueba*:

> Pues si no, o bien es igual a él o bien menor; ahora bien, el (ángulo) ΒΑΓ no es igual al ángulo ΕΔΖ; pues la base ΒΓ también sería igual a la base ΕΖ [I.4]; pero

> no lo es. Por tanto, el ángulo ΒΑΓ no es igual al (ángulo) ΕΔΖ; pero el (ángulo) ΒΑΓ tampoco es menor que el (ángulo) ΕΔΖ; pues la base ΒΓ también sería menor que la base ΕΖ [I.24]; pero no lo es; por tanto, el ángulo ΒΑΓ tampoco es menor que el (ángulo) ΕΔΖ. Pero se ha demostrado que tampoco es igual; luego el (ángulo) ΒΑΓ es mayor que el (ángulo) ΕΔΖ.

Analicemos la trama inferencial. La negación de lo que se pretende demostrar implica una disyunción: o bien ΒΑΓ es igual que el ángulo ΕΔΖ , o bien ΒΑΓ es menor que el ángulo ΕΔΖ. Esta disyunción es falsa. ¿Por qué? Porque ambos disjuntos lo son. Supongamos que ΒΑΓ es igual a ΕΔΖ. Dado que los lados ΑΒ y ΑΓ son respectivamente iguales a los lados ΔΕ y ΔΖ, si asumimos dicha igualdad, por I.4, las bases ΒΓ y ΕΖ serían iguales. Por hipótesis, no lo son. Luego, ΒΑΓ no es igual que el ángulo ΕΔΖ. ¿Es menor? No. Si el ángulo ΒΑΓ fuera menor que el ángulo ΕΔΖ, por I.24, la base ΕΖ sería mayor que la base ΒΓ. Por hipótesis, no lo es. Luego ΒΑΓ no es igual, ni es menor que el ángulo ΕΔΖ. Luego ΒΑΓ es mayor que el ángulo ΕΔΖ. Como la disyunción es falsa (o bien ΒΑΓ es igual que el ángulo ΕΔΖ, o bien ΒΑΓ es menor que el ángulo ΕΔΖ), la suposición asumida (a saber: la falsedad del resultado pretendido, es decir, la falsedad del [ángulo] ΒΑΓ es mayor que el [ángulo] ΕΔΖ) …es falsa, o sea: el resultado es verdadero. No hay nada semejante a la intensidad de la complementación heterogénea (la doble intervención diagrama-NC5) que observamos en I.24. Luego se evidencia nuevamente el contraste entre estructuras diagramáticas N+D y estructuras diagramáticas N en términos de complejidad (al igual que en I.18-I.19). Con las adaptaciones obvias cabe reiterar aquí las observaciones realizadas al par I.18-I.19, que se desprenden de esta situación.

Como ha sido ya consignado, las formas de expresarse la relación de recíprocos son múltiples y no se pretende agotar su análisis; sin embargo, posee cierto interés subrayar el patrón inferencial común que subyace a estos casos. Tal patrón resulta útil, por ejemplo, para analizar demostraciones como las de III.18-III.19; aunque estas no ilustran la totalidad de los rasgos identificados en los casos discutidos hasta aquí, exhiben en forma elocuente algunas significativas características comunes: compartir N (incluyendo la atribución de letras) y recurrir (por parte de III.19) al teorema III.18, explotando la direccionalidad invertida vía absurdo. Las demostraciones de III.18 y III.19 merecerán un comentario adicional en la última sección de este artículo.

3.

Los resultados recíprocos estudiados arriba han sido formulados en los Elementos como duplas o parejas de proposiciones –es decir: I.18-I.19, I.24-I.25–. En general, desde el punto de vista lingüístico, que la relación de recíprocos se exprese a través de dos teoremas o uno no parece revestir mayor interés. Pues es trivial como ir de un formato al otro: o se articulan en una conjunción o se desagregan los conjuntivos. Pero, desde el punto de vista de la demostración y, en particular, del diagrama, quizá merezca atenderse la situación cuando Euclides opta por formular nuestra relación vía una única proposición. ¿Ocurrirá una suerte de equivalencia con un hipotético caso puramente lingüístico? ¿Simplemente se tratará de superponer o desacoplar diagramas? Estudiemos dos ejemplos pertenecientes al libro III: III.3 y III.14.

El enunciado de III.3 es el siguiente:

> Si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.

El diagrama:

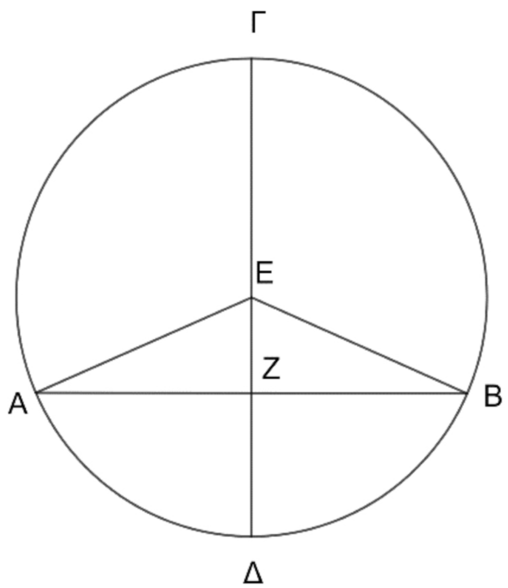

Diagrama 5 (III.3)

¿Cuál es N? La exposición:

> Sea ABΓ el círculo y en él una recta ΓΔ (trazada) a través del centro divida en dos partes iguales a una recta AB no (trazada) a través del centro, por el punto Z.

N contiene las dos rectas ΓΔ y AB, y el punto Z.

¿Cuál es D? La construcción:

> Tómese, pues, el centro del círculo ABΓ y sea E, y trácese EA, EB.

D incluye el punto E y las rectas EA, EB.

La prueba:

> Ahora bien, como AZ es igual a ZB y ZE es común, los dos (lados) son iguales a los dos (lados). Y la base EA es igual a la base EB; por tanto, el (ángulo) AZE es igual al (ángulo) BZE [I.8]. Pero cuanto una recta levantada sobre otra recta hace los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto [I, Def. 10]; por tanto, cada uno de los (ángulos) AZE, BZE es recto. Luego ΓΔ (trazada) a través del centro dividiendo en dos partes iguales a AB no (trazada) a través del centro, la corta también formando ángulos rectos.
>
> Pero ahora corte ΓΔ a AB formando ángulos rectos.
>
> Digo que también la divide en dos partes iguales, es decir, que AZ es igual a ZB.
>
> Pues, siguiendo la misma construcción, como EA es igual a EB, el ángulo EAZ es también igual al (ángulo) EBZ [I.5]. Pero el (ángulo) recto AZE es igual al (ángulo) recto BZE; por tanto, EAZ, EZB son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos, y un lado igual a un lado, el común a ambos EZ, que subtiende uno de los ángulos iguales; luego tendrá también los lados restantes iguales a los lados restantes [I.26]; así pues, AZ es igual a ZB.

La prueba incluye dos resultados perfectamente diferenciados, y sus tramas demostrativas correspondientes. Por razones de comodidad, llamémosles, respetando el orden de aparición en el texto, Resultado 1 y Resultado 2. Descritas las articulaciones categoriales en forma estilizada, podríamos decir que el primero va de rectas a ángulos y el segundo, de ángulos a rectas; no hay aquí sorpresas: simplemente se trata de la bidireccionalidad de los recíprocos. La demostración del segundo, a diferencia de los casos anteriores, no apela al uso de la estrategia propia de la demostración por el absurdo y, consecuentemente, respeta aquella orientación en la inferencia, es decir, la propia que dimana de la bidireccionalidad aludida (en el primer resultado, se supone lo afirmado por el antecedente del condicional, y se prueba el consecuente; en el segundo, se asume este último y se prueba el primero). ¿Cómo puede el diagrama servir a ambos tránsitos deductivos? Explotando la ambigüedad *interpretativa* del diagrama[14]. Desde el texto se mudan las atribuciones exactas en uno y otro caso. En la demostración del Resultado 1, el texto atribuye igual longitud a las rectas, en el Resultado 2 la igualdad se atribuye a los ángulos. Esta política supone el sometimiento (en el sentido de Manders) del diagrama en dos momentos distintos del desarrollo inferencial, análogo a lo que ocurre en los casos de pares recíprocos analizados en los apartados previos.

Pero quizá el comportamiento diagramático más contrastante con los casos anteriores es la explotación (en la demostración de ambos resultados) de una sola estructura N+D. En la demostración del Resultado 1, apelando a la hipótesis, afirmamos que AZ y ZB son iguales, EZ es compartido y las bases de los triángulos EAZ y EZB son iguales (por ser radios del círculo), entonces puedo aplicar I.8: los ángulos AZE y BZE son iguales. La Definición I.10 nos permite afirmar que son rectos. En la demostración del Resultado 2, "siguiendo la misma construcción", EA y EB son iguales por ser radios del círculo, y así el triángulo AEB es isósceles; por I.5 los ángulos de su base son iguales: EAZ y EBZ. Los triángulos EAZ y EZB tienen dos ángulos iguales (EAZ es igual a EBZ y AZE es igual a BZE pues ambos son rectos) y un lado igual (EZ, el común) que subtiende uno de los ángulos iguales, entonces, por I.26, podemos afirmar que AZ es igual a ZB[15]. No se trata entonces (meramente) de que se use el mismo diagrama, sino que se lo usa en ambos casos, por así decirlo, a cabalidad. Luego, aunque podría entenderse la construcción diagramática como peculiar adición de los diagramas respectivos, no existe una razón obvia para interpretarlo así. Quizá podría sospecharse otra posibilidad: la de una articulación novedosa entre diagrama y texto en estos resultados, que se vincula a su formulación lingüística como un único teorema y no a una dualidad o pareja de recíprocos.

14 La identificación del tipo de ambigüedad diagramática en Euclides que podemos denominar interpretativa es introducida en Seoane 2021a. Esta refiere a la capacidad del diagrama de admitir diversas lecturas exactas a partir de la intervención lingüística de la prueba.

15 Este pasaje deductivo es una bella ilustración de lo que hemos denominado ambigüedad perceptual o figural del diagrama euclídeo, a saber: la posibilidad, ante un mismo diagrama, de "configurarlo" de formas alternativas. En este caso, el mismo diagrama es el triángulo AEB y los dos triángulos EAZ y EZB. Esta duplicidad de lectura, como se aprecia, es esencial en la articulación deductiva (estas ideas se desarrollaron independientemente y con algunos matices diferentes en Macbeth 2010 y Seoane 2021b). Es así mismo un buen ejemplo de las complejas relaciones entre propiedades expresivas e inferenciales en la demostración matemática.

Una buena oportunidad para sopesar la sospecha sugerida antes consiste en el examen de III.14. Su *enunciado*:

> En un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí.

Su diagrama:

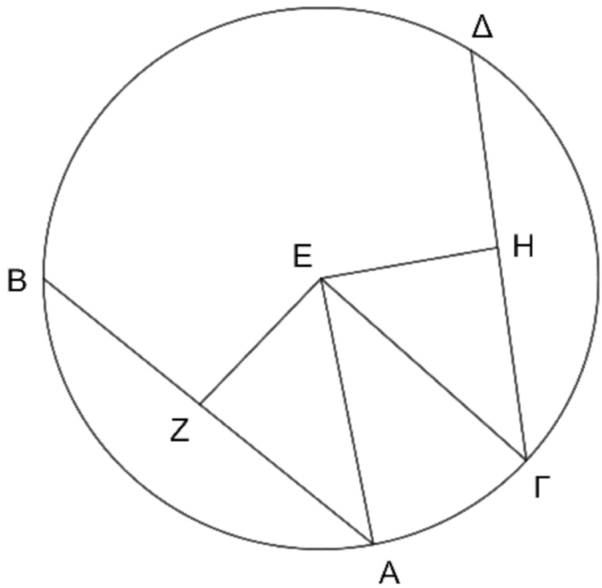

Diagrama 6 (III.14)

¿Cuál es N? La *exposición*:

> Sea ΑΒΓΔ el círculo, y sean iguales en él las rectas ΑΒ, ΕΔ,

N contiene entonces el círculo ΑΒΓΔ y las rectas ΑΒ, ΕΔ,

¿Cuál es D? La construcción:

> Tómese, pues, el centro del círculo ΑΒΓΔ [III.1] y sea E, y trácese EZ, EH perpendiculares a AB, ΓΔ. Y trácese AE, EΓ.

D incluye entonces el punto E, las rectas EZ, EH perpendiculares a AB, ΓΔ y las rectas AE, EΓ.

La *prueba*:

> Y como una recta que pasa por el centro, la EZ, corta formando ángulos rectos a otra recta que no pasa por el centro, la AB, también la divide en dos partes iguales [III.3]. Por tanto, AZ es igual a ZB; luego AB es el doble de AZ. Por lo mismo, ΓΔ es también el doble de ΓH; AB es, asimismo, igual a ΓΔ; por tanto, AZ es también igual a ΓH. Y como AE es igual a EΓ, el (cuadrado) de AE es también igual al (cuadrado) de EΓ. Pero los cuadrados de AZ, EZ son iguales al (cuadrado) de AE; porque el ángulo correspondiente a Z es recto; y los (cuadrados) de EH, HΓ son iguales al (cuadrado) de EΓ; porque el ángulo correspondiente a H es recto [I.47]; por tanto, los cuadrados de AZ, ZE son iguales a los cuadrados de ΓH, HE, de los cuales el cuadrado de AZ es igual al (cuadrado) de ΓH; luego el (cuadrado) restante de ZE es igual al cuadrado de EH; así pues, EZ es igual a EH. Pero en un círculo se dice que dos rectas están a la misma distancia del centro, cuando las perpendiculares trazadas desde el centro hasta ellas son iguales (III, Def. 4]; por tanto, AB, ΓΔ están a la misma distancia del centro.
>
> Pero ahora estén a la misma distancia del centro las rectas AB, ΓΔ, es decir sea EZ igual a EH.
>
> Digo que AB es también igual a ΓΔ.
>
> Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de modo similar que AB es el doble de AZ, y ΓΔ (el doble) de ΓH; y como AE es igual a ΓE, el cuadrado de AE es igual al cuadrado de ΓE; pero los cuadrados de EZ, ZA son iguales al cuadrado de AE, y los cuadrados EH, HΓ son iguales al cuadrado de ΓE [I.47]. Por tanto, los cuadrados de EZ, ZA son iguales a los cuadrados de EH, HΓ; de los cuales el cuadrado de EZ es igual al cuadrado de EH, porque EZ es igual a EH; luego el cuadrado restante de AZ es igual al (cuadrado) de ΓH; así pues, AZ es igual a ΓH; y AB es el doble de AZ, y ΓΔ es el doble de ΓH; por tanto, AB es igual a ΓΔ.

Nuevamente, la prueba incluye los dos resultados, y sus correspondientes tramas demostrativas. Un aspecto interesante es que la especularidad propia de la relación de recíproco, en este caso, no involucra la categoría de los objetos relacionados: se trata, por así decirlo, de una especularidad predicativa. En el sentido esquemático ya utilizado aquí, podemos decir que el Resultado 1 va de la igualdad de las rectas referidas a su igual distancia (del centro) y que el Resultado 2 va de igual distancia (del centro) a igual longitud (de las rectas referidas). La demostración del segundo tampoco apela a la estrategia del absurdo. La pregunta fundamental: ¿cómo el diagrama opera en ambos tránsitos deductivos? Por supuesto: apoyándose en la ambigüedad interpretativa (y, obviamente, valiéndose de la ambigüedad figural). En el Resultado 1, usando la Definición 10 (del libro I) y III.3, podemos afirmar que EZ dividen en dos partes iguales a BA, es decir: AZ es igual a BZ. Luego AB es el doble de AZ. ΓΔ es entonces el doble de ΓH –recuérdese la hipótesis–. Y, luego, AZ es igual a ΓH. Por ser radios del círculo AE y EΓ son iguales y así el cuadrado de AE es igual al cuadrado de EΓ. Pero los cuadrados de AZ y EZ son iguales a AE y los cuadrados EH y HΓ son iguales al cuadrado de EΓ –por I.47, ya que los ángulos, respectivamente, Z y H son rectos–. Luego los cuadrados AZ, ZE son iguales a los cuadrados ΓH, HE. Dado que AZ es igual a ΓH, el cuadrado de AZ es igual al cuadrado ΓH. Y así el cuadrado ZE es igual al cuadrado EH, de donde EZ es igual a EH. Por Definición 4, del Libro III: las rectas AB y ΓΔ están a igual distancia del centro. El Resultado 2, siguiendo la misma construcción como en el caso anterior, se demuestra de modo semejante, usando protagónicamente I.47; explotando ahora que están las rectas en cuestión a la misma distancia del centro, el cuadrado de EZ es igual al cuadrado de EH y así los cuadrados AZ y ΓH son iguales, de donde AZ y ΓH son iguales. Por III.1 AB es el doble de AZ y ΓΔ es el doble de ΓH, luego AB es igual a ΓΔ. La ductilidad del diagrama se basa nuevamente en su ambigüedad interpretativa: en el Resultado 1 el texto atribuye la igualdad a las rectas AB y ΓΔ, en el Resultado 2 el texto atribuye la igualdad a EZ y EH. Como se advierte, el diagrama es usado a cabalidad en los dos tránsitos inferenciales. Dicho de otra forma, aunque la sospecha sugerida en el examen del caso anterior no se prueba, su plausibilidad resiste este test modesto. Más que la yuxtaposición de dos diagramas, el escenario parece consistir en que el único diagrama usado cabalmente se asocia a la formulación lingüística en clave bicondicional, como formulación de un único teorema. Las características restantes siguen la misma pauta que el caso previo, en especial, el sometimiento del diagrama a las atribuciones exactas especulares en los momentos correspondientes a las demostraciones de uno y otro resultado. Como el lector o la lectora ya ha advertido, este aspecto vincula a estos casos con los ejemplos tratados en los apartados 1 y 2.

4.

El estudio de teoremas recíprocos en Euclides debiera contemplar más variantes que aquellas que (en forma inicial y modesta) se han tratado en estas páginas. Por ejemplo, existen casos de resultados de este tipo que se presentan como relación, por decirlo en forma algo imprecisa, entre un resultado y una parte o fragmento de otro. Así podría quizá pensarse, por citar un caso, la relación entre I.5 (En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí) y I.6 (Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí). Por otra parte, hay pares de teoremas recíprocas que, aunque poseen un parentesco relevante con las demostraciones analizadas en los apartados 1 y 2, poseen una diferencia estructural (esto es: poseen una estructura infinita) por la cual merecerían un tratamiento particular (III.18-III.19)[16]. En pocas palabras: existen múltiples ejemplos a examinar.

Sin embargo, este estudio limitado y preliminar permite afirmar razonadamente algunas ideas significativas. En primer término, podemos identificar, a nivel diagramático, ciertas características o rasgos que revelan o traducen la singularidad de la relación que nos interesa y que se encuentra perfectamente especificada a nivel proposicional. Rasgos estos que responden ya a la producción, ya a la lectura de los diagramas. A la producción, en la acepción de la igualdad del núcleo y de la selección de letras; a la lectura, en la modalidad de sometimiento del diagrama al texto.

En segundo lugar, los rasgos referidos a la producción podríamos quizá decir que corresponden (en un sentido amplio) a la disciplina de diagramas y suponen una novedad: exceden las normas de confección del diagrama en relación con la demostración particular; su propósito parece residir en establecer cierta articulación entre los diagramas correspondientes a demostraciones singulares de proposiciones diferentes[17]. La motivación (en este caso) podríamos conjeturar que consiste en comunicar en forma óptima la relación en cuestión.

En tercer lugar, el rasgo de lectura arriba atribuido supone una explotación de la cooperación visual-lingüística asociada a la ambigüedad interpretativa del diagrama, y a la división del trabajo en la lectura de los rasgos atribuibles al diagrama. Dicho en forma rápida: estamos autorizados a leer en el diagrama casi exclusivamente atribuciones coexactas, y en el texto atribuciones exactas.

En cuarto lugar, tales opciones estimulan eventualmente ciertas opciones metodológicas inferenciales y sugieren el orden de aparición de las proposiciones independientes o el de los resultados respectivos (si se presentan en un solo teorema). Esta observación debe tomarse *cum grano salis*, y no en forma rígida, habida cuenta de diferencias apreciables en el tratamiento de estas dos opciones.

En general, las consideraciones resultantes no pueden leerse como conclusiones definitivas, sino más bien aproximaciones parciales y provisorias; sin embargo, parecen fundamentar razonablemente la agrupación y comparación de casos, a partir de la identificación de los rasgos arriba enumerados.

[16] Esta clase de demostraciones ha sido especificada por Netz (1999a, cap. 6); un análisis del estilo heterogéneo inferencial de estas se puede leer en Seoane (2022).

[17] Manders caracteriza la disciplina de diagramas como el ejercicio adecuado de habilidades al producir los diagramas (aun imperfectos) que exige la práctica" (Manders 2008, p. 89 y Manders en prensa, p. 348). Este autor parece estar pensando en habilidades orientadas a responder a las exigencias exclusivamente inferenciales, pero una lectura más hospitalaria de dicha disciplina diagramática quizá pudiera hacer lugar a este tipo de requerimientos.

Referencias

Chateaubriand, O. (2005). *Logical Forms, Part II – Logic, Language, and Knowledge*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência.

De Risi, V. (2021). Euclid's Common Notions and the Theory of Equivalence. *Foundations of Science 26,* 301-324. https://doi.org/10.1007/s10699-020-09694-w

Euclides. (1908a). *The thirteen books of the Elements* (Traducción y comentario Thomas L. Heath, vol. 1). Dover.

___. (1908b). *The thirteen books of the Elements* (Traducción y comentario Thomas L. Heath, vol. 2). Dover.

___. (1991). *Elementos (Libros I-IV)* (Traducción M. L. Puertas Castaños, introducción Vega Reñón). Gredos.

Giaquinto, M. (2008). Visualizing in Mathematics. En P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (pp. 22-42). Oxford UP.

Lassalle Casanave, A. y Seoane, J. (2016). Las demostraciones por absurdo y la Noción Común 5. En E. Caorsi, R. Navia, y F. Sautte (Orgs.), *Significado y negación: escritos lógicos, semánticos y epistemológicos* (pp. 39-50). Mastergraf.

Macbeth, D. (2010). Diagrammatic Reasoning in Euclid's Elements. En B. Van Kerkhove, J. P. Van Bendegem y J. De Vuyst (Eds.), *Philosophical Perspectives on Mathematical Practice, Texts in Philosophy* (vol. 12). College Publications.

Manders, K. (2008). The Euclidian Diagram. En P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (pp. 80-133). Oxford UP.

___. (En prensa). El diagrama Euclidiano. En A. Peláez (Comp.), *Diagramas: fundamentos y aplicaciones* (pp. 319-400).

Netz, R. (1999a). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics.* Cambridge UP.

___. (1999b). Proclus' division of the mathematical proposition into parts: how and why was it formulated?. *The Classical Quarterly 49*, 282-303. https://doi.org/10.1093/cq/49.1.282.

Proclo (1970). *A Comentary on the First Book of Euclid´s Elements* (Traducción, introducción y notas de G. R. Morrow). Princeton UP.

Seoane, J. (2016). Demostraciones heterogéneas: repensando las preguntas, *Representaciones 12*(2), 87-108.

Seoane, J. (2021a). Heterogeneidad euclidiana. *O que nos faz pensar, 29*(49), 78-99. http://doi.org/10.32334/oqnfp.2021n49a797.

___. (2021b). Demostración euclidiana y ambigüedad perceptual. En G. Seco, F. Sautter, O. Esquisabel y W. Sanz (Eds.), *De Mathematicae atque Philosophicae Elegantia: Notas festivas para Abel Lassalle Casanave* (pp. 261-273). College Publications.

___. (2022). Estilo polimodal en la demostración euclidiana. *Diánoia 67*(89), 39-65. http://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2022.89.1903.

Vega Reñón, L. (1991). Introducción general. En Euclides, *Elementos* (pp. 7-184). Gredos.

Weaver, G. (1988). Reading proofs with understanding. *Theoria 54*(1), 31-47.